# INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 20

Gil da Costa Marques

# 20.1 Introdução

É notório o fato de que vivemos num mundo em transformação. A presença de um determinado agente num sistema físico (como, por exemplo, uma força) acarreta uma determinada transformação (o movimento, no caso da força). Cada uma das mudanças acontece a uma determinada taxa de variação.

O fato é que as leis da natureza expressam relações entre taxas de variação do que é transformado com os agentes responsáveis por elas. Usualmente, queremos determinar as consequências (os efeitos, portanto) da presença dos agentes transformadores, os quais são assumidos conhecidos. É disso que trata o problema das equações diferenciais nas ciências.

Assim, a grande maioria das leis físicas, especialmente as leis fundamentais, é formulada em termos de equações diferenciais. Em princípio, toda a química se reduziria a encontrar soluções para equações diferenciais mui especiais. O problema (e com ele a dificuldade) da previsão do clima envolve a determinação de soluções de equações diferenciais. Muitos problemas da eletrônica, da eletrotécnica, da engenharia civil podem ser formulados em termos de equações diferenciais. Daí a relevância do tema para todas as ciências.

Uma equação diferencial para funções de uma variável real é entendida, no sentido mais amplo possível, como o problema de encontrar a função $f(x)$ (a consequência) a partir de uma relação entre taxas de variação de ordens distintas e os agentes que provocam a variação. Geralmente representamos os agentes que provocam transformações com funções representadas a seguir pela função $E(x)$. Assim, a solução de uma equação diferencial reside na determinação da função $f(x)$ que satisfaça a uma relação da forma:

$$\Phi\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{df(x)}{dx}, f(x)\right) = E(x) \qquad 20.1$$

Denominamos ordem da equação diferencial, à ordem da derivada mais alta da equação. No caso acima, a ordem é dada pelo índice $n$.

O dado mais relevante no problema das equações diferenciais é o agente $E(x)$. No entanto, em muitos casos, uma equação diferencial é escrita apenas como uma relação envolvendo taxas de variação. Quando o termo $E(x)$ é nulo ($E(x) = 0$), a equação será denominada homogênea.

A resolução de uma equação diferencial da forma geral **20.1** implica na determinação da função $f(x)$. Ou seja, na determinação do que é transformado quando sob a ação do agente $E(x)$.

Por exemplo, a lei de Newton relaciona a taxa de variação de segunda ordem da posição de um objeto com o agente que provoca a mudança de posição. Tal agente recebe o nome de força, representada por $\vec{F}(\vec{r})$. Sendo o vetor posição representado por $\vec{r}(t)$, a lei de Newton se escreve como

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{20.2}$$

Assim, todo problema de mecânica se resume a encontrar soluções de equações diferenciais.

## 20.2 Equações Diferenciais Lineares

Num curso regular de cálculo, lidamos apenas com equações diferenciais lineares, as quais são definidas pela forma geral dada por:

$$a_n\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_1\frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = E(x) \tag{20.3}$$

A expressão acima define uma equação linear não homogênea de ordem $n$. A equação homogênea, associada a ela, se escreve:

$$a_n\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_1\frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0 \tag{20.4}$$

A seguir, consideraremos apenas casos simples de equações diferenciais. Apesar de simples, algumas delas são de interesse.

A característica mais marcante das equações diferenciais lineares diz respeito ao princípio da superposição. Ele afirma que, se

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\cdots\cdot f_n(x), \tag{20.5}$$

forem soluções linearmente independentes da equação diferencial **20.4**, então uma superposição das mesmas também o será. Assim, a solução mais geral possível da equação **20.3** será da forma:

$$f(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + b_3 f_3(x) + \ldots + b_n f_n(x) \qquad 20.6$$

onde $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$ são constantes a serem determinadas. Como regra geral, tais constantes são determinadas a partir de condições ditas iniciais.

# 20.3 Equações Lineares de Primeira ordem

A equação linear de primeira ordem e mais geral possível pode ser escrita como:

$$a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = E(x) \qquad 20.7$$

A seguir consideraremos os casos mais simples, encerrando esse tópico com a resolução da equação de primeira ordem para o caso em que o termo não homogêneo é constante.

## 20.3.1 Equações de Primeira ordem não homogêneas simples

Consideremos o caso da equação diferencial de primeira ordem linear e não homogênea mais simples. Tais equações assumem a forma:

$$\frac{df(x)}{dx} = E(x) \qquad 20.8$$

A resolução da equação acima implica em determinar a função $f(x)$ tal que sua derivada seja uma função dada, a função $E(x)$. Basicamente, a solução de **20.8** se reduz a encontrar a função primitiva da função $E(x)$.

Lembrando o conceito de diferencial de uma função, podemos escrever a equação acima sob a forma:

$$df(x) = E(x)dx \qquad 20.9$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$\int_{x_A}^{x} df(u) = \int_{x_A}^{x} E(u)du \qquad 20.10$$

donde encontramos a função $f(x)$ em termos de uma integral de uma função de uma variável:

$$f(x) - f(x_A) = \int_{x_A}^{x} E(u)du \qquad 20.11$$

## 20.3.2 Equações lineares homogêneas de primeira ordem

Tais equações têm a forma geral:

$$a\frac{df(x)}{dx} + bf(x) = 0 \qquad 20.12$$

A solução para a equação diferencial acima pode ser encontrada de uma forma simples, uma vez que ela pode ser reescrita como:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{b}{a}dx \qquad 20.13$$

Sempre que $f(x)$ não se anula, integrando termos a termo, encontramos:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{df(u)}{f(u)} = -\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} du \qquad 20.14$$

E, portanto, a solução da equação diferencial **20.12** é:

$$\ln f(x) - \ln f(x_0) = -\frac{b}{a}(x - x_0) \qquad 20.15$$

ou, de outra forma:

$$f(x) = f(x_0)e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)} \qquad 20.16$$

## Exemplos

• Exemplo 1

Na **Figura 20.1**, apresentamos um circuito RC, não alimentado por uma fonte. Trata-se de um circuito contendo apenas um capacitor, cuja capacitância é C e um resistor cuja resistência é R. Nesse caso, eles se encontram dispostos em série.

Determine a equação diferencial para o comportamento da carga elétrica que flui pelo mesmo como função do tempo, a partir do instante em que a chave é fechada.

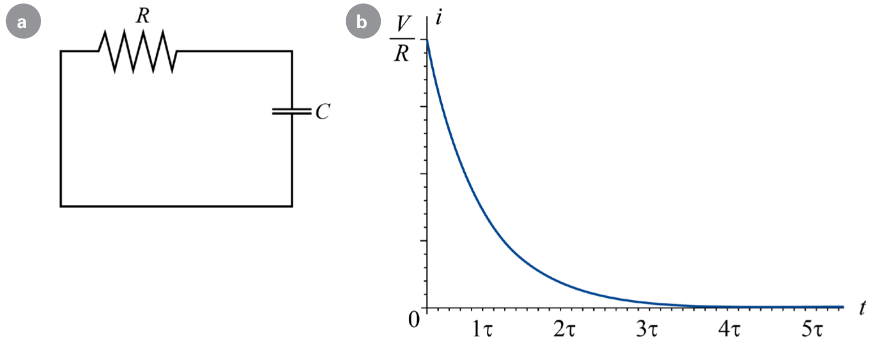


**Figura 20.1: a.** Circuito RC e **b.** o comportamento da corrente como função do tempo.

→ Resolução:

Levando-se em conta a lei de Kirchoff, ao ligarmos a chave encontraremos que a soma das diferenças de potencial ao longo do circuito deve se anular. Obtemos, portanto:

$$\frac{Q}{C} + RI = 0 \quad \Rightarrow \quad Q + RC\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{20.17}$$

De acordo com a solução **20.16**, a carga elétrica depende do tempo de acordo com a expressão:

$$Q(t) = Q(t_0)e^{-\left(\frac{t-t_0}{RC}\right)} \tag{20.18}$$

A corrente elétrica obedece igualmente a uma lei do decaimento exponencial. Obtemos:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}e^{-\left(\frac{t-t_0}{RC}\right)} \tag{20.19}$$

- Exemplo 2

Analise o caso de um objeto que se movimenta num fluido de tal forma que não existam outras forças agindo na direção do movimento, além daquela exercida pelo fluido. Admita que a força exercida pelo fluido seja uma força viscosa que dependa linearmente com a velocidade. Um bom exemplo dessa situação é aquela de um barco que, a partir de um determinado momento, desliga o motor.

→ Resolução:

No caso, temos várias forças agindo sobre o objeto. Na direção normal à superfície do lago agem duas forças. A força peso é equilibrada pela força de empuxo. Na direção tangencial temos apenas a força devido às colisões do barco com as partículas que compõem o fluido. Assim, nessa direção, a tangencial, temos que a equação de Newton se escreve como:

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -bV(t) \tag{20.20}$$

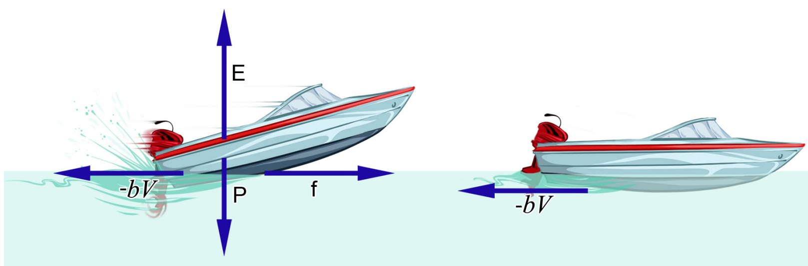


**Figura 20.2:** Forças agindo sobre um barco em movimento, com destaque para a força viscosa.

Recaímos, assim, numa equação de primeira ordem para a velocidade. O problema agora recai naquele que denominamos integração da equação diferencial. Nem sempre isso é simples como nesse caso. Para fazê-lo, reescrevemos a equação acima sob a forma:

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = -\frac{b}{m}dt = -\gamma dt \tag{20.21}$$

Agora, integramos os dois membros dessa equação. Essa integração corresponde a efetuar a soma de Riemann de cada um dos lados, levando-se em conta a variável tempo. Ou seja, integramos ambos os termos sobre os tempos, desde um tempo inicial $t_0$ até o tempo presente ($t$):

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dV(t')}{V(t')}dt' = -\gamma\int_{t_0}^{t}dt' \tag{20.22}$$

As duas integrais envolvem a determinação da função primitiva. Ambas são funções primitivas bastante simples. Obtemos:

$$\ln\left(V(t)\right) - \ln\left(V(t_0)\right) = \ln\left(\frac{V(t)}{V(t_0)}\right) = -\gamma\left(t - t_0\right) \tag{20.23}$$

Tomando agora a exponencial dos dois lados encontramos:

$$V(t) = V(t_0)\, e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{20.24}$$

donde se infere que a velocidade do barco decresce exponencialmente. Para determinarmos a posição, lembramos agora que,

$$\frac{dx(t)}{dt} = V(t) = V_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{20.25}$$

E, portanto, temos a seguinte relação entre diferenciais:

$$dx(t) = V_0 e^{-\gamma(t-t_0)} dt \tag{20.26}$$

Integrando a equação acima, teremos a identidade:

$$\int_{t_0}^{t} dx(t') = V_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t'-t_0)} dt' \tag{20.27}$$

O que nos leva à solução:

$$x(t) = x(t_0) - \frac{V_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right) \tag{20.28}$$

A conclusão é que o barco percorre uma distância

$$\Delta x(t) = \frac{V_0}{\gamma} \tag{20.29}$$

até parar.

Assim, como resultado da utilização das leis de Newton, e a partir da solução da equação diferencial correspondente, é possível fazer uma previsão para a posição e a velocidade do barco para cada instante de tempo. Tal solução envolve claramente as condições no instante tomado como o instante inicial. Em particular, vemos que a distancia percorrida depende da velocidade inicial. Quanto maior for essa velocidade, tanto maior será a distância percorrida pelo barco na água até ele parar.

## 20.3.3 Equações com um termo não Homogêneo Constante

A equação diferencial, linear e de primeira ordem mais geral possível é da forma:

$$a\frac{df(x)}{dx}+bf(x)=E(x) \tag{20.30}$$

A seguir, apresentaremos a solução apenas no caso em que o termo não homogêneo seja constante. Nesse caso, escrevemos:

$$a\frac{df(x)}{dx}+bf(x)=E_0 \tag{20.31}$$

- **Exemplo 3**

Resolver a equação que descreve o movimento de uma esfera quando solta num líquido viscoso.

→ Resolução:

Consideremos agora o caso de uma esfera que é solta dentro de um liquido viscoso e que é colocada em movimento sob a ação da gravidade. Devemos levar em conta, além da força da gravidade, a força exercida pelo fluido viscoso. Admitiremos ainda que o movimento se dê ao longo do eixo *y*, pois agora o movimento é na vertical.

Assim, levando em conta a força exercida pelo fluido como sendo diretamente proporcional à velocidade, e a força gravitacional como sendo constante, escrevemos a seguinte equação de primeira ordem para a velocidade da esfera:

$$m\frac{dV_y(t)}{dt}=-bV_y(t)+mg \tag{20.32}$$

Essa equação é da forma **20.31** e ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dV_y(t)}{V_y(t)+\left(\frac{g}{\gamma}\right)}=-\gamma dt \tag{20.33}$$

onde $\gamma = b/m$.

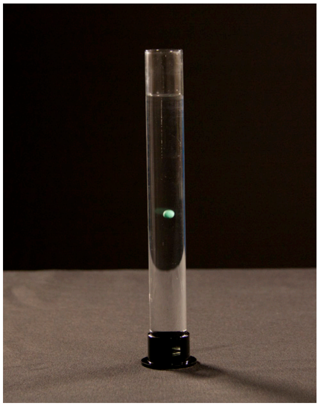

**Figura 20.3:** Movimento de uma esfera num meio viscoso.

Integrando membro a membro a equação acima, obtemos a solução para a velocidade em função da velocidade inicial $V_y(t_0)$ (no caso em que a esfera é solta, essa velocidade é nula):

$$V_y(t) = -\left(\frac{g}{\gamma}\right) + \left(V_y(t_0) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)\right)e^{-\gamma(t-t_0)} \quad 20.34$$

A primeira conclusão à qual chegamos é que, independentemente do valor da velocidade inicial, a partícula atinge uma velocidade final, que é constante, e que é dada por:

$$V_y(\text{final}) = -\left(\frac{g}{\gamma}\right) \quad 20.35$$

Observe-se que essa velocidade final é exatamente aquela para a qual a força exercida pelo líquido se torna igual à força gravitacional. De fato, de **20.32** vemos que uma solução descrevendo o movimento uniforme é válida desde que a velocidade final obedeça à seguinte relação:

$$-bV_y(\text{final}) - mg = 0 \quad 20.36$$

Infere-se da equação de Newton, portanto, que, ao atingir essa velocidade limite, a partícula se movimenta com velocidade constante. Fato esse que se pode comprovar experimentalmente.
A solução para a posição como função do tempo é:

$$y(t) = y(0) - \left(\frac{g}{\gamma}\right)(t-t_0) - \frac{1}{\gamma}\left(V_y(t_0) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)\right)\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - 1\right) \quad 20.37$$

Da solução dada pela expressão **20.37**, concluímos que no limite em que o tempo tende a infinito, obtemos a seguinte dependência da posição com o tempo:

$$y(t \to \infty) \cong y(0) - \left(\frac{g}{\gamma}\right)(t-t_0) + \frac{1}{\gamma}\left(V_y(t_0) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)\right) \quad 20.38$$

O que de novo indica que, com o passar do tempo, o movimento da esfera tende a ser um movimento uniforme.

# 20.4 Equações Lineares de segunda ordem

A equação linear de segunda ordem mais geral possível é da forma:

$$\boxed{a_2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = E(x)} \quad 20.39$$

Sem o termo não homogêneo essa equação é:

$$a_2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0 \qquad 20.40$$

## 20.4.1 Equações Lineares de Segunda ordem lineares não-homogêneas simples

Definiremos equações lineares de ordem $n$ e simples como sendo equações lineares simples quando tais equações assumem a forma:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = E(x) \qquad 20.41$$

A razão para tal denominação advém do fato de que tais equações são integráveis. Ou seja, elas são solúveis uma vez que as soluções podem ser expressas em termos de integrais.

Como primeiro passo, definimos uma função auxiliar definida por:

$$g(x) = \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \qquad 20.42$$

A função auxiliar $g(x)$ satisfaz à equação:

$$\frac{dg(x)}{dx} = E(x) \qquad 20.43$$

Cuja solução já foi discutida. Em seguida, definimos uma nova função auxiliar de um forma análoga a **20.42**. E assim, sucessivamente.

Assim, as equações lineares de segunda ordem mais simples e com um termo não homogêneo são aquelas que podem ser escritas sob a forma:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = E(x) \qquad 20.44$$

A solução para tais equações será ilustrada por meio do exemplo a seguir. O procedimento adotado a seguir pode ser facilmente estendido para encontrar soluções para equações da forma **20.41**.

• Exemplo 4

Uma partícula de massa *m* se move numa região na qual o campo elétrico é uniforme no espaço mas depende do tempo $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(t)$. Escreva as equações de movimento e determine a solução para a velocidade e a posição da partícula a qualquer tempo.

→ Resolução:

No caso em que o campo magnético é nulo, a equação de Newton se escreve:

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=q\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right] \quad 20.45$$

Com o intuito de buscar uma solução para tal equação, introduzimos a função vetorial auxiliar:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad 20.46$$

onde, em princípio, $\vec{v}(t)$ é um função vetorial desconhecida. No caso em apreço tal função é a velocidade da partícula.

Lembrando que o campo elétrico depende só do tempo, podemos escrever a equação **20.45** sob a forma:

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=q\left[\vec{E}_0(t)\right] \quad 20.47$$

Utilizando a definição de aceleração reduzimos o problema ao de determinar a velocidade da partícula. Isso é possível nesse caso porque a equação para a velocidade é uma equação de primeira ordem no tempo. A equação **20.45** pode ser reescrita em termos de diferenciais. Obtemos:

$$md\vec{v}(t)=q\left[\vec{E}_0(t)\right]dt \quad 20.48$$

Efetuando-se a integral em cada um dos lados, somos levados à solução:

$$m\int_0^t\frac{d\vec{v}(u)}{du}du=q\int_0^t\vec{E}_0(u)du \quad 20.49$$

A integral do primeiro termo é trivial e nos leva ao seguinte resultado:

$$m\int_0^t\frac{d\vec{v}(u)}{du}du=m\left(\vec{v}(t)-\vec{v}(0)\right)=m\left(\vec{v}(t)-\vec{v}_0\right) \quad 20.50$$

Integrando ambos os membros da equação acima determinamos a velocidade da partícula como função do tempo:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \frac{q}{m}\int_0^t \vec{E}_0(u)du \tag{20.51}$$

Admitiremos que a velocidade inicial ($\vec{v}_0$) seja conhecida. Esse é um ponto muito importante. A solução completa pressupõe o conhecimento da velocidade em algum instante de tempo. Essa é uma condição dita condição inicial pois é sabido que o movimento depende de como ele se iniciou (arbitrariamente tomamos o inicio do movimento no instante de tempo $t = 0$). Como resultado das integrais acima, só nos interessa o que ocorreu depois desse instante de tempo.
Levando em conta a definição da velocidade a equação acima se escreve agora como uma equação de primeira ordem para a posição:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{v}_0 = \frac{q}{m}\int_0^t \vec{E}_0(u)du \tag{20.52}$$

Integrando cada termo dessa equação, como fizemos para o caso da velocidade, encontraremos que o vetor posição será dado pela expressão:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{q}{m}\int_0^t dy \int_0^y \vec{E}_0(u)du \tag{20.53}$$

Como era de se esperar, a solução envolve o conhecimento não só da velocidade no instante de tempo inicial como também o conhecimento da posição inicial da partícula. As condições iniciais a serem especificadas são, como em todo problema de mecânica, os dados sobre a posição e velocidade iniciais:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) &= \vec{v}_0 \end{aligned} \tag{20.54}$$

Consideremos, a titulo de ilustração, o caso em que o campo elétrico é um campo uniforme. Nesse caso o vetor de posição para qualquer tempo será dado por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{q}{2m}\vec{E}_0 t^2 \tag{20.55}$$

e, obtemos da equação acima, que o movimento é uniformemente variado pois a aceleração é constante e dada por:

$$\vec{a}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}_0 \tag{20.56}$$

Imaginando uma escolha do eixo $z$ coincidindo com a direção do campo elétrico, a solução geral se escreve como:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$y = y_0 + v_{0y}t \qquad 20.57$$
$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{qE_o}{2m}t^2$$

## 20.4.2 Casos especiais de Equações Diferenciais Homogêneas de Segunda Ordem

Um caso bastante importante, por seu amplo uso, é aquele das equações diferenciais de segunda ordem que podem ser escritas sob a forma geral:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\omega^2 f(x) \qquad 20.58$$

A solução para tais equações será apresentada a partir de dois exemplos, os quais ilustram a relevância desse tipo de equação diferencial.

- Exemplo 5

O exemplo mais simples de equação diferencial de segunda ordem sem o termo não homogêneo é aquele do Movimento Harmônico Simples. Ou seja, o movimento no qual uma partícula de massa $m$ é colocada a oscilar sob o efeito de uma força elástica da forma:

$$F(x) = -kx \qquad 20.59$$

onde $k$ é uma constante dita elástica e $x$ é a coordenada associada à posição da partícula.

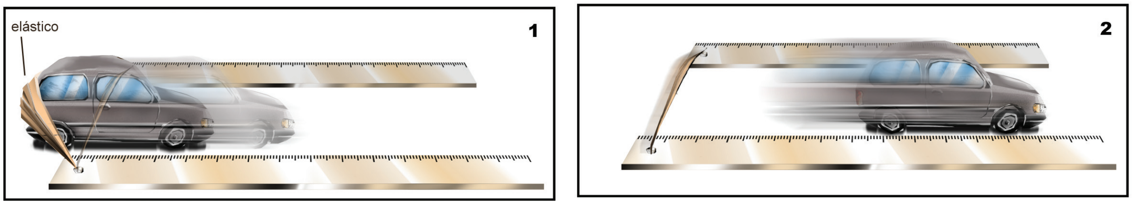


**Figura 20.4:** A força elástica em ação.

A lei de Newton se escreve, no caso do M.H.S.:

$$ma = -kx \qquad 20.60$$

e, portanto,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad 20.61$$

Para determinarmos a solução para a equação acima, devemos lembrar que a derivada segunda da função seno e cosseno nos leva às mesmas funções precedidas de um sinal menos e de uma constante. Assim, se procurarmos duas soluções da forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos\omega t \\ x_2(t) &= \operatorname{sen}\omega t \end{aligned} \qquad 20.62$$

verificaremos que, se o parâmetro ω for tal que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad 20.63$$

então, qualquer uma delas satisfaz à equação **20.61**, uma vez que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\big(x_1(t)\big) &= -\omega^2 x_1(t) \\ \frac{d^2}{dx^2}\big(x_2(t)\big) &= -\omega^2 x_2(t) \end{aligned} \qquad 20.64$$

Assim, a solução geral para a equação de Newton (**20.60**) pode ser escrita sob a forma de uma cominação linear das duas funções trigonométricas (seno ou cosseno). Escrevemos, portanto, a solução sob a forma:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \qquad 20.65$$

E, portanto, a solução geral pode ser escrita como:

$$x(t) = a_1\cos\omega t + a_2\operatorname{sen}\omega t \qquad 20.66$$

a qual pode ser escrita ainda como:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad 20.67$$

Ou, analogamente,

$$x(t) = A\big[\cos(\omega t)\cos(\theta_0) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\theta_0)\big] \qquad 20.68$$

Trata-se de uma solução envolvendo dois parâmetros desconhecidos ($A$, $\theta_0$) e que podem ser determinados como segue.

Notemos primeiramente que a solução proposta **20.67** é tal que o valor máximo do deslocamento $x_m$ será dado por:

$$x_m = A \tag{20.69}$$

O parâmetro $A$ é, portanto, a amplitude do movimento. A constante $\theta_0$ é a fase inicial. As constantes $A$ e $\theta_0$ podem ser determinadas a partir das condições iniciais. Isto é, a partir da posição e da velocidade iniciais

$$x(0) = x_0 \qquad v(0) = v_0 \tag{20.70}$$

- Exemplo 6: Circuito RLC

A resolução do problema de um circuito composto apenas por uma indutância e um capacitor também nos leva a uma equação da forma **20.58**. Tal circuito é apresentado na **Figura 20.4**. Veremos que quando o circuito é fechado, a corrente resultante é uma corrente alternada.

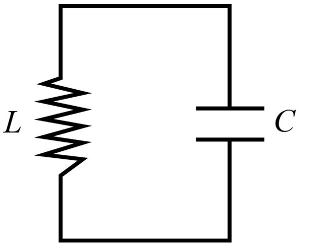

**Figura 20.5:** Circuito LC.

No circuito RLC mais simples, o circuito LC, admitimos apenas um indutor caracterizado por uma indutância L e um capacitor de capacidade C. Esses componentes do circuito podem estar ligados em série ou em paralelo. Consideraremos aqui apenas o primeiro caso. O circuito será fechado num instante de tempo $t = 0$ o capacitor está carregado, neste instante, com uma carga cujo valor é $Q_0$.

Ao fecharmos o circuito a carga elétrica no capacitor se torna função do tempo, pois ela fluirá pelo mesmo alterando assim a carga elétrica no capacitor (em cada uma das suas placas). Ao fluir gera uma corrente elétrica fluindo no circuito.

A equação diferencial básica do circuito LC é:

$$\frac{Q(t)}{C} + L\frac{dI(t)}{dt} = 0 \tag{20.71}$$

onde $I(t)$ é a corrente fluindo pelo circuito e $Q(t)$ é a carga armazenada no capacitor.

Em termos da carga elétrica, a equação **20.71** se escreve:

$$\frac{Q(t)}{C} + L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = 0 \tag{20.72}$$

Obtemos assim uma equação diferencial que é um caso particular de **20.58**. De acordo com o que foi discutido anteriormente, neste caso a solução geral é da forma:

$$Q = Q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \tag{20.73}$$

Para a solução dada acima, a corrente elétrica será dada por:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta) = \omega Q_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{20.74}$$

onde

$$\omega = \sqrt{LC} \qquad (20.75)$$

A condição de que a carga no capacitor inicialmente é dada pelo valor $Q_0$, implica que a fase se anula. Escrevemos assim, $\delta = 0$.

Concluímos, a partir de **20.73** e **20.74**, que depois de fechado o circuito, tanto a carga quanto a corrente dependem do tempo de uma forma periódica. Ou seja, a corrente é alternada de período $T = 2\pi/\omega$.

Um caso mais geral é aquele no qual o circuito é alimentado por uma bateria ou por um gerador de corrente alternada. As fontes de corrente podem ser, portanto, fontes de corrente continua ou fontes de correntes alternadas. Esses casos serão discutidos a seguir.

# 20.5 Equações Lineares Homogêneas de segunda ordem: caso geral

Soluções gerais para as equações lineares de segunda ordem serão apresentadas por meio de um exemplo extraído do estudo dos circuitos RLC.

- Exemplo 7: Circuito RLC

O circuito RLC, quando alimentado por uma fonte, conforme ilustrado na **Figura 20.6**, provê o melhor exemplo de equações diferenciais da forma **20.39**.

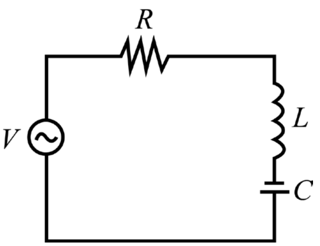


**Figura 20.6:** Circuito RLC alimentado por uma fonte de tensão.

Num circuito RLC, as grandezas físicas relevantes como carga elétrica armazenada no capacitor ou a corrente que percorre o circuito são grandezas físicas que dependem do tempo. Pode-se determinar tal dependência a partir de uma equação diferencial linear de segunda ordem no tempo. Por essa razão, tais circuitos são denominados de circuitos de segunda ordem no tempo.

Para escrevermos a equação diferencial que é a base para o estudo dos circuitos RLC, começamos pela lei de Kirchoff para circuitos no que tange à soma das diferenças de potenciais. Escrevemos:

$$\Delta V(t)_c + \Delta V(t)_r + \Delta V(t)_i = V(t) \qquad (20.76)$$

onde V é a voltagem provida pela fonte de corrente elétrica e as diferenças de potencial são aquelas dos diversos elementos do circuito: o capacitor, o resistor e o indutor. Utilizando as expressões para as diferenças de potencial nos terminais de cada um dos elementos em **20.76**, obtemos a equação:

$$\frac{Q(t)}{C} + RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = V(t) \qquad (20.77)$$

onde $Q$ é a carga elétrica e $I$ é a corrente elétrica que percorre o circuito. Lembrando a relação entre essas grandezas:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \tag{20.78}$$

e substituindo essa expressão na equação **20.77**, obtemos a equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt^2} + L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = V(t) \tag{20.79}$$

Que é a equação fundamental para circuitos RLC em série.
Pode-se escrever a solução para a equação acima como sendo dada por uma soma envolvendo dois termos:

$$Q(t) = Q_0(t) + Q_G(t) \tag{20.80}$$

onde $Q_0(t)$ é uma solução da equação homogenea (ou livre), enquanto $Q_G(t)$ é uma solução da equação geral, ou seja, da equação **20.79**.

## 20.6 Solução da Equação Homogênea

Soluções da equação homogênea são de interesse por dois motivos. Em primeiro lugar, porque tal equação descreve um circuito RLC quando não alimentado por uma fonte. Soluções dessa equação estão associadas a uma situação física na qual inicialmente existe uma certa quantidade de carga no capacitor, ou uma corrente no circuito (ou ambos). Denominamos as cargas e correntes existentes no início (caracterizado pelo tempo $t = 0$) por:

$$Q_0(t=0) = Q_0(0), \quad \mathrm{I}(t=0) = \mathrm{I}(0) \tag{20.81}$$

Procurar soluções para a equação homogênea é importante, por outro lado, sempre que estivermos interessados em efeitos de transientes nos circuitos alimentados por uma fonte. Isto é, efeitos que têm a ver com as condições iniciais do sistema, mas que vão se tornando menos e menos importantes à medida que o tempo passa.

A equação homogênea se escreve:

$$\frac{Q_0(t)}{C} + R\frac{dQ_0(t)}{dt^2} + L\frac{d^2Q_0(t)}{dt^2} = 0 \qquad 20.82$$

Tal equação é análoga à de um oscilador harmônico amortecido. Isto é, um oscilador que está sujeito a uma forção de amortecimento da forma:

$$F = -bv = -b\frac{dx}{dt} \qquad 20.83$$

No caso do oscilador harmônico simples, a equação análoga a **20.82** é

$$\frac{1}{C} \Leftrightarrow k, \quad \mathrm{R} \Leftrightarrow b, \quad \mathrm{L} \Leftrightarrow m, \quad \mathrm{Q} \Leftrightarrow X \qquad 20.84$$

onde $X$ é a posição da partícula como função do tempo, $k$ é a constante elástica da mola e $m$ é a massa da partícula. Temos assim uma correspondência com um análogo mecânico. Isso faz com que possamos passar de um problema para o outro efetuando as seguintes substituições:

$$\frac{1}{C} \Leftrightarrow k, \quad \mathrm{R} \Leftrightarrow b, \quad \mathrm{L} \Leftrightarrow m, \quad \mathrm{Q} \Leftrightarrow X \qquad 20.85$$

A forma de resolver equações da forma **20.82** é através da tentativa de se buscar uma solução da forma:

$$\left(Q_0(t) = Q_0 e^{i\omega t}\right) \qquad 20.86$$

Claramente tal solução é uma função a valores complexos. Assim, as soluções fisicamente aceitáveis são ou a parte real, ou a parte imaginária de $Q(t)$, ou uma combinação linear das soluções. Dessa forma, se definirmos $Q_{01}$ e $Q_{02}$ como as partes reais e imaginárias,

$$Q_{01}(t) \equiv \mathrm{Re}\,Q_0(t), \qquad Q_{02}(t) \equiv \mathrm{Im}\,Q_0(t) \qquad 20.87$$

Então, a solução da equação homogênea será dada como uma combinação linear das duas soluções.

Escrevemos assim:

$$Q_0(t) = a_1 Q_{01}(t) + a_2 Q_{02}(t) \quad 20.88$$

onde $a_1$ e $a_2$ são constantes arbitrárias, mas que podem ser determinadas a partir das condições iniciais. Ou seja, a partir das condições dadas quando iniciamos o estudo do fenômeno.

A substituição da solução proposta em **20.82** resulta na seguinte equação:

$$\left(\frac{-\omega^2}{C} + i\omega R + L\right) Q_0 e^{i\omega t} = 0 \quad 20.89$$

o que nos leva a concluir que uma solução como aquela proposta na equação **20.82** é de fato possível, desde que ω seja dado como uma das soluções da equação do segundo grau:

$$\frac{-\omega^2}{C} + i\omega R + L = 0 \quad 20.90$$

Temos, assim, duas soluções:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}\left(iRC + \sqrt{4LC - (RC)^2}\right), \quad \omega^- = \frac{1}{2}\left(iRC - \sqrt{4LC - (RC)^2}\right) \quad 20.91$$

Em função dos possíveis valores de R, L e C, podemos ter três situações físicas distintas.

## 20.6.1 Oscilações Superamortecidas

Esse caso ocorre para valores da resistência muito grandes. Ou seja, satisfazendo a condição

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad 20.92$$

o circuito RLC oscilará, mas de uma forma muito peculiar. Isso é, ele será superamortecido. Isso decorre da solução que será da forma:

$$Q_0(t) = Ae^{-\frac{RC}{2}t} e^{tRC\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}} + Be^{-\frac{RC}{2}t} e^{-tRC\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}} \quad 20.93$$

e, portanto, descrevendo a carga sendo continuamente elétrica no circuito diminuindo continuamente (exponencialmente decrescente). Isso resulta da forte dissipação que ocorre no resistor e que resulta no superamortecimento da solução.

As constantes A e B da solução acima podem ser determinas a partir da carga no capacitor no instante de tempo igual a zero e da corrente elétrica. Por exemplo:

$$Q_o(0) = A + B \tag{20.94}$$

## 20.6.2 Oscilações Amortecidas Criticamente

Esse caso ocorre para uma relação especifica entre as constantes R, L e C. Ou seja, quando essas grandezas satisfazem a condição:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{20.95}$$

o circuito RLC será amortecido de uma forma dita crítica. A solução agora é da forma:

$$Q_0(t) = (A + Bt)e^{-\frac{RC}{2}t} \tag{20.96}$$

Essa é uma solução que, como no caso anterior, descreve uma situação física na qual o capacitor é continuamente descarregado e no qual a corrente no circuito decresce exponencialmente:

$$I(t) = \left(B - \frac{1}{2}RC(A + Bt)\right)e^{-\frac{RC}{2}t} \tag{20.97}$$

As constantes A e B da solução acima são determinadas a partir da carga no capacitor no instante de tempo igual a zero e da corrente elétrica nesse instante de tempo. Temos, explicitamente:

$$\begin{aligned} A &= Q_o(0) \\ B &= I(0) + \frac{1}{2}RCQ_0(0) \end{aligned} \tag{20.98}$$

## 20.6.3 Oscilações Subamortecidas

Esse é o caso mais interessante dos três. Ele ocorre para valores das constantes que satisfaçam a condição:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{20.99}$$

A solução geral agora será da forma:

$$Q_0(t) = Ee^{-\frac{RC}{2}t}\cos\omega' t + De^{-\frac{RC}{2}t}\operatorname{sen}\omega' t \tag{20.100}$$

onde $E$ e $D$ são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais e $\omega'$ é uma frequência dada por:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \left(\frac{RC}{2}\right)^2} \tag{20.101}$$

A constante $C$ dá a carga elétrica do sistema no instante de tempo t=0.

$$C = Q\left(t = 0\right) \tag{20.102}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{LC}$ é, como se verá a seguir, a frequência natural de oscilação do sistema quando a resistência tende a zero.

## 20.6.4 Oscilações forçadas: fonte de corrente alternada

Consideremos o caso em que o circuito seja alimentado por uma fonte de corrente alternada. Escrevemos para a diferença de potencial provida pelo gerador:

$$V\left(t\right) = V_0 Cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{20.103}$$

Denominaremos o valor máximo da diferença de potencial ($V_0$) de amplitude. A constante $\varphi_0$ é uma fase cuja importância nesse ponto não é muito grande, uma vez que ela pode ser eliminada através de uma escolha adequada do tempo inicial.

Para uma alimentação do circuito dada por **20.103**, a equação de um circuito RLC será dada por:

$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt^2} + L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = V_0 Cos(\omega t + \varphi_0) \quad 20.104$$

Com o intuito de buscarmos soluções para a equação acima, escreveremos essa equação de tal forma a admitir soluções com variáveis complexas. Designaremos as soluções complexas por $Q^*(t)$. Tal solução pode ser encontrada ao escrevermos a equação acima como:

$$\frac{Q^*(t)}{C} + R\frac{dQ^*(t)}{dt^2} + L\frac{d^2Q^*(t)}{dt^2} = V_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad 20.105$$

A solução pretendida será dada como a parte real da solução complexa ($Q(t)$), isto é,

$$Q(t) = \mathrm{Re}\, Q^*(t) \quad 20.106$$

Como no caso anterior, procuraremos soluções da forma exponencial. Para isso, escrevemos:

$$Q^*(t) = Ae^{i\omega t} \quad 20.107$$

Substituindo a solução proposta em **20.107**, na equação **20.105** encontraremos que, de fato, uma tal solução é possível desde que:

$$\left(\frac{1}{C} + i\omega R - L\omega^2\right)A = V_0 \quad 20.108$$

Ou seja, se $A$ for um número complexo dado por:

$$A = \frac{V_0}{L}\frac{1}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2 + i\omega\frac{R}{L}\right)} \quad 20.109$$

onde a frequência natural de oscilação é dada em **20.75**. Utilizando a propriedade fundamental dos números complexos, podemos escrever qualquer número sob a forma de uma amplitude vezes uma exponencial,

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i\theta} \quad \text{onde} \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \tag{20.110}$$

Utilizando a identidade acima, a amplitude se escreve como:

$$A = \frac{V_0}{L} \frac{e^{i\theta_0}}{\left(\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{R}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{20.111}$$

onde $\theta_0$ é uma diferença de fase dada por:

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega \frac{R}{L}}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\right) \tag{20.112}$$

Assim, a solução geral para o circuito RLC quando alimentado por uma fonte de corrente alternada é dada pela parte real de **20.107** com a constante A dada por **20.111**. Obtemos assim:

$$Q(t) = \frac{V_0}{L} \frac{\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \theta_0\right)}{\left(\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{R}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \equiv Q_M \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \theta_0\right) \tag{20.113}$$

A solução mais geral possível para um circuito RLC , levando-se em conta efeitos de transiente, é dada pela solução particular **20.113** mais a solução geral. Escrevemos portanto:

$$Q(t) = Ee^{-\frac{RC}{2}t} \cos\omega' t + De^{-\frac{RC}{2}t} \operatorname{sen}\omega' t + \frac{V_0}{L} \frac{\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \theta_0\right)}{\left(\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{R}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{20.114}$$

onde as constantes $E$ e $D$ são obtidas a partir das condições iniciais. Os termos de transiente, que dependem das condições iniciais do sistema, tendem a zero exponencialmente. Ou seja, só tem efeitos significativos quando ligamos a fonte. Depois de um alguns instantes, a corrente no sistema será uma corrente alternada com a mesma frequência da fonte e dada pela expressão:

$$I(t) = -I_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0 + \theta_0) \tag{20.115}$$

onde o valor máximo da corrente será dado por:

$$I_M = \frac{\dfrac{V_0\omega}{L}}{\left(\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\dfrac{R}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{20.116}$$

Um outro efeito introduzido pelos componentes RLC no sistema é introduzir uma diferença de fase em relação à fase da fonte. Essa diferença de fase é $\theta_0$, onde esse ângulo é definido em **20.112**. A diferença de fase se anula quando a resistência é nula.

# 20.7 Equações diferenciais Não lineares

Esses casos são mais complexos. Nem sempre é possível encontrar uma solução simples. Considere o caso de uma equação diferencial da forma:

$$a\frac{df(x)}{dx} + bf^2(x) = E_0 \tag{20.117}$$

• Exemplo 8:

Resolva as equações diferenciais resultantes no estudo do movimento da bolha quando consideramos o caso de uma força que depende do quadrado da velocidade.

→ Resolução:

Nesse caso a lei de Newton se escreve como:

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -BV^2(t) + mg \tag{20.118}$$

Apesar de ter a mesma forma da equação anterior, essa equação não é uma equação linear. Ou seja, não vale o princípio da superposição para ela. Como no caso anterior, no entanto, podemos escrevê-la de uma forma equivalente à expressão **20.117**. Ou seja,

$$\frac{dV_y(t)}{V_y^{\,2}(t)+\left(\frac{g}{\gamma}\right)}=-\gamma dt \qquad 20.119$$

Integrando membro a membro a equação acima, obtemos a solução para o caso de uma velocidade inicial diferente de zero, ou seja:

$$V_y(t)=V_y(0)+\left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/2}\tanh-\sqrt{g\gamma}t \qquad 20.120$$

Assim, nos instantes de tempo iniciais, caracterizados pela condição $t \ll (g\gamma)^{-1/2}$, podemos verificar que o movimento é acelerado, pois nesse caso vale o resultado aproximado:

$$V_y(t)\approx V_y(0)+gt \qquad 20.121$$

Enquanto para grandes valores do intervalo de tempo, caracterizados pela condição $t \gg (g\gamma)^{-1/2}$, a solução **20.112** nos leva a um valor constante da velocidade, esse valor agora é, considerando-se agora o caso de velocidade inicial nula, dado por:

$$V_y(t)=\left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/2} \qquad 20.122$$

Valor esse que poderíamos deduzir do fato de que, nesse limite, as forcas se compensam, levando-nos ao resultado:

$$-BV_y^{\,2}(t)+mg=0 \qquad \Rightarrow V_y(t)=\left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/2} \qquad 20.123$$

Concluímos assim que, como no caso anterior, a partícula atinge uma velocidade final constante. Se a partícula parte de uma posição inicial $y(0) = 0$, sua coordenada $y$ dependerá do tempo, da seguinte forma:

$$y(t)=\left(\frac{1}{\gamma}\right)\ln\cosh\left(\sqrt{g\gamma}t\right) \qquad 20.124$$

E, portanto, nos instantes iniciais do movimento ($t \ll (g\gamma)^{-1/2}$), temos:

$$y(t)\cong\frac{1}{2}gt^2 \qquad 20.125$$

enquanto nos instantes finais (aqueles para os quais vale a desigualdade $t \gg (g\gamma)^{-1/2}$) o movimento será uniforme.

Nesse limite, a solução **20.124** nos leva ao resultado:

$$y(t) \cong \sqrt{\frac{g}{\gamma}}t - \left(\frac{1}{\gamma}\right)(\ln 2) \tag{20.126}$$

o qual é inteiramente compatível com **20.123**.

Muitas vezes a derivada aparece na forma do quadrado. Por exemplo, no estudo do movimento dos planetas, recaímos numa equação da forma:

$$E = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{a}{r^2}\right] - \frac{k}{r} \tag{20.127}$$

onde $a$, $m$, $E$ e $k$ são constantes. Essa equação se reduz a uma forma integrável, pois em última instância pode ser escrita como:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{k}{r} - \frac{a}{r^2}}} \tag{20.128}$$

E esta pode ser integrada depois de escrevermos, para o sinal positivo, a seguinte expressão:

$$\pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{k}{r} - \frac{a}{r^2}} = \frac{dr}{dt} \tag{20.129}$$

e, portanto, reduzimos o problema a determinar integrais indefinidas.

## Lista de Imagens

Thinkstock.com: Figuras 2.7, 7.2.